Barycentre

1. Savoir

1.1. Barycentre de deux points

1.1.1. Définitions

On appelle barycentre de deux points A et B affectés des coefficients a et b, tels que $a + b \neq 0$, l'unique point G défini par :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = 0}$$

On appelle isobarycentre le barycentre de la famille de points pondérés {(A ; k) ; (B ; k)} avec $k \neq 0$.

1.1.2. Théorèmes

Soit G, barycentre des points (A ; α) et (B ; β), on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$$

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; α) et (B ; β) avec $\alpha + \beta \neq 0$. Pour tout point M on a :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}}$$

1.1.3. Coordonnées

Dans un repère $(0 ; \vec{\imath} ; \mathrm{j} ; \vec{k})$, les coordonnées $(x_g ; y_g ; z_g)$ de G, barycentre de (A ; α) et (B ; β) vérifient :

$$\boxed{\begin{aligned} x_G &= \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G &= \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \\ z_G &= \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta} \end{aligned}}$$

1.2. Barycentre de trois points ou plus

1.2.1. Définitions

On appelle barycentre des trois points pondérés (ou plus) A, B et C affectés des coefficients α, β et γ, l'unique point G défini par :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = 0$$

On appelle isobarycentre le barycentre de la famille de points pondérés {(A ; k) ; (B ; k) ; (C ; k)} avec $k \neq 0$.

1.2.2. Théorèmes

Soit G le barycentre des points pondérés (A ; α), (B ; β) et (C ; γ) avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, pour tout point M,

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}$$

Soit G, barycentre de (A ; α), (B ; β) et (C ; γ), avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, le point G appartient à un plan contenant les points A, B et C et on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\,\overrightarrow{CB}$$

Yves Romani – yves.romani@live.fr

1.2.3. Coordonnées

Dans un repère $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$, les coordonnées $(x_g\,;y_g\,;z_g)$ de G, barycentre de (A ; α), (B ; β) et (C ; γ) vérifient :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

1.2.4.Propriétés

Soit un système de masse non nulle de points pondérés coplanaires : $S = \{(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)\}$, alors on a :

Commutativité : $G = \text{Bar}\,\{(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)\} = \text{Bar}\,\{(A_t, a_t), \ldots, (A_p, a_p)\}$

Homogénéité : $G = \text{Bar}\,\{(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)\} = \text{Bar}\,\{(A_1, ka_1), \ldots, (A_n, ka_n)\}$

Associativité : Le barycentre est inchangé si on remplace certains points par leur barycentre partiel, affecté de la somme non nulle de leurs coefficients.

Conservation : Soit f, une transformation usuelle du plan alors f(G) est le barycentre du système $S' = \{(f(A_1), a_1), \ldots, (f(A_n), a_n)\}$

2. Savoir-faire

2.1. Placer le barycentre de deux points

Soit G, le barycentre de la famille de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; 3)}. Placer les points A, B et G sur une figure (vous justifierez mathématiquement pour G)

Corrigé :

Comme G est le barycentre de la famille de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; 3)}, alors on a :

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = 0$$
$$2\overrightarrow{GA} + 3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}) = 0$$
$$5\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

```
A          G     B
|---------|------|
```

2.2. Prouver l'alignement du barycentre et de deux autres points

Soit G, le barycentre de la famille de points pondérés {(A ; 2) ; (B ; -1)}, montrer que A, G et B sont alignés.

Corrigé :

Comme G est barycentre alors on a :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{2-1}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, A, G et B sont donc alignés.

2.3. Calculer les coordonnées du barycentre

Dans un repère $(0 ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$, soient A (2 ; 3 ; 4) et B (1 ; 3 ; 5). Calculer les coordonnées du barycentre G de la famille de points pondérés {(A ; 3) ; (B ; -2)}.

Corrigé :

$$x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} ; y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} ; z_G = \frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$$

$$x_G = \frac{3\times2+(-2)\times1}{3-2} ; y_G = \frac{3\times3+(-2)\times3}{3-2} ; z_G = \frac{3\times4+(-2)\times5}{3-2}$$

$$x_g = 4 ; y_g = 3 ; z_g = 2$$

 Yves Romani – yves.romani@live.fr

2.4. Utiliser l'associativité

Soit ABC, un triangle, L le barycentre de la famille de points pondérés {(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 3)} et P le barycentre de {(A ; 1) ; (B ; 2)}. Placer P et L.

Corrigé :

Comme P est le barycentre de {(A ; 1) ; (B ; 2)} alors on a :

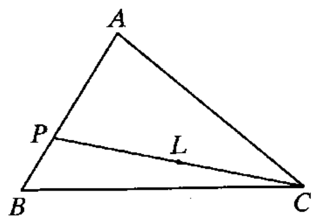
$$\overrightarrow{AP} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

Comme L est le barycentre de {(P ; 3) ; (B ; 3)}, il est clair que L est isobarycentre de P et C, on a donc :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

On obtient donc la figure ci-après :



2.5. Démontrer que des points sont coplanaires

ABCD est un tétraèdre. Soient I milieu de [AB], J milieu de [AC], K symétrique de D par rapport à A et L le centre de gravité du triangle BCD.
Démontrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Corrigé :

K symétrique de D par rapport à A implique $\overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{KA}$ *donc* $\overrightarrow{KD} - 2\overrightarrow{KA} = 0$. *(I)*
I milieu de [AB] implique $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ *donc* $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$. *(II)*
J milieu de [AC] implique $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JC}$ *donc* $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = 0$. *(III)*
L centre de gravité du triangle BCD implique $\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = 0$. *(IV)*

On vectorialise alors chaque équation en un point donné (ici, arbitrairement, ce sera J). Et on obtient :
$\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JD} - 2(\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KA}) = 0$ *ce qui est équivalent à :* $-\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JD} - 2\overrightarrow{KA} = 0$ *(I)*
$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = 0$ *ce qui est équivalent à :* $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = 0$ *(II)*
On garde $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = 0$ *qui est déjà vectorialisée en J (III)*
$\overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JD} = 0$ *ce qui est équivalent à* $3\overrightarrow{LJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = 0$. *(IV)*

On a donc toute combinaison linéaire de ces quatre équations égale au vecteur nul. Plus particulièrement : (I) + (II) + (III) – (IV) = 0

$$-\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JD}-2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC}-\left(3\overrightarrow{LJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)=0$$

$$-\overrightarrow{KJ}+\cancel{\overrightarrow{JD}}-2\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JA}+\cancel{\overrightarrow{JB}}+\overrightarrow{JA}+\cancel{\overrightarrow{JC}}-3\overrightarrow{LJ}-\cancel{\overrightarrow{JB}}-\cancel{\overrightarrow{JC}}-\cancel{\overrightarrow{JD}}=0$$

$$-\overrightarrow{KJ}+2\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{IJ}+2\overrightarrow{JA}-3\overrightarrow{LJ}=0$$

$$-\overrightarrow{KJ}+2\overrightarrow{JK}+2\overrightarrow{IJ}-3\overrightarrow{LJ}=0$$

$$\overrightarrow{JK}-2\overrightarrow{JI}+3\overrightarrow{JL}=0$$

Ce qui revient à dire que J est le barycentre du triangle KIL.
I, J, K et L sont donc situés dans un même plan, c'est-à-dire coplanaires.

Conseils : pour montrer que des points ou des vecteurs sont coplanaires, il faudra vectorialiser en un même point toutes les égalités dont on dispose. Puis par addition obtenir une équation impliquant l'existence de tous les points sur un même plan.

2.6. Démontrer que trois droites sont concourantes

Soient ABC un triangle et P, Q et R, trois points définis par les relations suivantes :

$$3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0\,;\,\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RB}$$

Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Corrigé :

Comme $3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$ *alors P est le barycentre de la famille {(B ; 3) ; (C ; 1)}.*

Comme $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ *alors* $4\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=0$*, en vectorialisant en Q on obtient :*

$$4\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{QC}=0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{QC}=0 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}=0$$

Q est donc le barycentre de la famille {(A ; 3) ; (C ; 1)}.

Comme $\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RB}$*, alors il est l'isobarycentre de la famille {(A ; 3) ; (B ; 3)} (en fait R est, par homogénéité, l'isobarycentre de la famille {(A ; k) ; (B ; k)}, mais par rapport aux résultats précédents c'est cette famille qui nous intéresse).*

Des résultats précédents on déduit le système : S = {(A ; 3) ; (B ; 3) ; (C ; 1)} pour lequel il existe (car 3 + 3 + 1 ≠ 0) un barycentre G.
Donc par associativité on a :
G = Bar {(P ; 4) ; (A ; 3)}, G = Bar {(Q ; 4) ; (B ; 3)}, G = Bar {(R ; 6) ; (C ; 1)},
donc G appartient simultanément aux droites (AP), (BQ) et (CR),
il est alors le points où les trois droites concourent.

Conseils : pour montrer que des droites sont concourantes, il faudra exprimer les nouveaux points du système sous forme de barycentre partiels, en déduire l'existence d'un système pondéré, utiliser l'associativité pour montrer que le barycentre appartient aux droites étudiées.

Yves Romani – yves.romani@live.fr

3. Démonstration du cours

3.1. $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}$

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = 0$$
$$\alpha\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}\right) = 0$$
$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} + \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = 0$$
$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

3.2. $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\ \overrightarrow{AB}$

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$
$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$
$$\beta\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} - (\alpha + \beta)\overrightarrow{MA}$$
$$\beta\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG} + (\alpha + \beta)\overrightarrow{AM} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG}$$
$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

3.3. $x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$; $y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$; $z_G = \frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$
$$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{OG}$$
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}$$

Soit $(x_g ; y_g ; z_g)$ les coordonnées de G dans le repère $(0 ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath} ; \vec{k})$, on a :

$$x_g\vec{\imath} + y_g\vec{\jmath} + z_g\vec{k} = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\alpha\left(x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath} + z_A\vec{k}\right) + \beta\left(x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} + z_B\vec{k}\right)\right]$$

$$= \frac{\alpha x_A\vec{\imath}+\beta x_B\vec{\imath}}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha y_A\vec{\jmath}+\beta y_B\vec{\jmath}}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha z_A\vec{k}+\beta z_B\vec{k}}{\alpha+\beta}$$

D'où : $x_g = \frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$; $y_g = \frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$; $z_g = \frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$

3.4. Associativité du barycentre

Ne pas oublier que la somme des coefficients doit être non-nulle On a alors, pour G barycentre de $\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta) ; (C ; \gamma)\}$:

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = 0 \quad (I)$$

Soit H, le barycentre de $\{(A ; \alpha) ; (B ; \beta)\}$, on a :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GH}$$

En remplaçant $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$ par $(\alpha + \beta)\overrightarrow{GH}$ dans (I) on obtient :

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = 0$$

G est donc, par définition, le barycentre de $\{(H ; \alpha + \beta) ; (C ; \gamma)\}$.